

Logique et démonstrations

Feuille Accompagnatrice

1) Cogitos

Pré-chapitre

- Factoriser $X^n - 1$ par $X - 1$. En cas de difficulté commencer par des petites valeurs de n .
- Combien l'équation $\sqrt{2-x} = x$ admet-elle de solutions ? Résoudre algébriquement, et comparer à une lecture graphique.
- Effectuer la division euclidienne de 100 par 13.
- Donner la définition d'un nombre premier, d'une fonction croissante, d'une suite non majorée, d'une suite qui tend vers $+\infty$.
- On veut montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n+1$. Pourquoi la rédaction suivante est-elle fondamentalement incorrecte ?
« Pour $n = 0$, l'inégalité est vraie. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n+1$. Alors $2^{n+1} \geq 2(n+1) \geq n+2$. Donc le résultat est démontré. »
- Quelle est la contraposée de l'implication $n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$.
Laquelle de l'implication ou de sa contraposée paraît la plus simple à démontrer directement ?
- Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On considère la rédaction suivante :
« On suppose qu'il existe une fonction p paire et une fonction i impaire telles que $f = p + i$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = p(x) + i(x)$ et $f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$. En sommant ces deux égalités, on obtient $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$. En en faisant la différence, on obtient $i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. »
Qu'a-t-on démontré avec cette rédaction ?
 - que toute fonction f s'écrit comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
 - que toute fonction f s'écrit d'au plus une unique façon comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
 - rien du tout, vu l'hypothèse faite.
- On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Posons $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$. Que vaut $a^{\sqrt{2}}$? En déduire qu'il existe deux nombres irrationnels x, y tels que x^y soit rationnel.
- On a, pour tout $x, y \in \mathbb{R}, 2xy \leq x^2 + y^2$ (Pourquoi ?). En déduire que pour tout $a, b \geq 0$, on a $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Post-chapitre

- Simplifier la négation des assertions $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq x$ et $\forall n, n \text{ premier} \Rightarrow 2^n + 1 \text{ premier}$
- Que penser des énoncés suivants :
 - $\forall b \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{Z}, \exists (q, r) \in \mathbb{Z}^2, a = bq + r \text{ et } r \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$
 - $\forall b \in \mathbb{Z}^*, \forall a \in \mathbb{Z}, \exists (q, r) \in \mathbb{Z}^2, a = bq + r \text{ et } r \in \llbracket 0, |b|-1 \rrbracket$
 - $\forall b \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R}, \exists q \in \mathbb{Z}, \exists r \in [0, b[, a = bq + r$
- Soient $a, b \in \mathbb{N}$.
 - Que peut-on dire de a, b si il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 2$?
 - Si a, b sont premiers entre eux, y a-t-il unicité des coefficients $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$?
- Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer que si $x_1 + \dots + x_n \leq M$, alors il existe un indice i tel que $x_i \leq \frac{M}{n}$.
- Donner un exemple d'une suite de fonctions bornées pour laquelle l'assertion $\exists M, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq M$ est fausse.
- Donner un exemple explicite d'une suite vérifiant $u_n \rightarrow +\infty$, mais qui n'est pas «croissante à partir d'un certain rang».
- Que dire d'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x, y, f(x) + f(y) = x + y$?

[Lien vers des QCMS](#)

2) Plan du chapitre

a) La logique

La première partie du chapitre porte sur des éléments de logique : l'écriture d'assertions de manière formelle, comme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq x$$

et l'étude du sens de celles-ci.

b) Automatismes de rédaction

La deuxième partie du chapitre consiste en des exemples variés de raisonnements et de démonstrations de propriétés élémentaires d'arithmétique et d'analyse du programme du lycée, avec parfois quelques points techniques supplémentaires.

Outre quelques rappels, l'objectif principal est d'illustrer les éléments de rédaction d'une démonstration qui sont attendus. Rappelons qu'une démonstration mathématique est un raisonnement, qui est communiqué en français (bien qu'il puisse ponctuellement utiliser des assertions écrites formellement).

Contrairement à ce à quoi vous pouvez avoir l'habitude, ces éléments de rédaction sont précis et assez minimalistes. Ils sont étroitement liés aux définitions formelles des assertions utilisées et démontrées, ainsi qu'au raisonnement choisi.

À ce titre, ils ne constituent pas un simple revêtement esthétique facultatif à une démonstration, mais bien une part fondamentale.

Exemple Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que $(\mathcal{P}) \Rightarrow (\mathcal{Q})$, pour les assertions suivantes

$$(\mathcal{P}): \forall c \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in I, |x - c| < \varepsilon \quad \text{et} \quad (\mathcal{Q}): \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a < b) \Rightarrow \exists x \in I, a < x < b.$$

Démonstration. $\Rightarrow$: On suppose $(\mathcal{P})$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$,

Pour démontrer $(\mathcal{Q})$ qui commence par « $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ».

On suppose que $a < b$

Pour démontrer $(a < b) \Rightarrow \exists x \in I, \dots$

[Il faut à présent trouver un $x \in I$ tel que $a < x < b$. Pour cela on utilise $(\mathcal{P})$.]

D'après $(\mathcal{P})$, appliqué à $c = \frac{a+b}{2}$ et $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, il existe $x \in I$ tel que $|x - c| < \varepsilon$, c'est-à-dire $|x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}$

On a alors $x < c + \varepsilon = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = b$ et $x > c - \varepsilon = a$, donc $a < x < b$.

d'où le résultat. □

3) Énoncés et démonstrations notables (à connaître pour l'interro)

Remarque L'intégralité du cours est à relire/retravailler pour l'interro, et les exercices faits en TD sont à savoir refaire. Les éléments de la liste qui suit sont notables ou bien par leur importance, ou bien par leur difficulté.

Il faut savoir énoncer précisément les théorèmes de division euclidienne, et de Bézout, ainsi que toutes les définitions formelles données, dont $u_n \rightarrow +\infty$.

Il faut savoir refaire les démonstrations du théorème de la division euclidienne, de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, du fait que tout entier est produit de nombres premiers, du fait que toute fonction s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, et du fait qu'une suite qui tend vers l'infini admet un minimum.

4) Réponses aux cogitos

Pré-chapitre

- $X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1)$.
- Une seule solution.
- $100 = 13 \times 7 + 9$: le quotient est 7 et le reste est 9.
- L'hérédité suppose le résultat vrai pour *tout* n , c'est exactement ce qu'il faut démontrer.
- n impair $\Rightarrow n^2$ impair.
- Cela démontre l'unicité. L'existence demande vérification.
- On a $a^{\sqrt{2}} = 2$. Si $a \in \mathbb{Q}$, prendre $x = y = \sqrt{2}$, sinon prendre $x = a$ et $y = \sqrt{2}$.
- L'inégalité est équivalente à $(x - y)^2 \geq 0$. Appliquer l'inégalité à $x = \sqrt{a}$ et $y = \sqrt{b}$.

Post-chapitre

- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n < x$ et $\exists n, n$ premier et $2^n + 1$ non premier.
- Les trois assertions sont vraies, et le couple (q, r) est même unique dans les trois cas.
- On a $\text{pgcd}(a, b) \mid 2$, donc $\text{pgcd}(a, b) \in \{1, 2\}$.
 - Il n'y a pas unicité. Si (u_0, v_0) est une solution, alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(u_0 + kb, v_0 - ka)$ est encore une solution.
- Par contraposée : si $x_i > \frac{M}{n}$ pour tout i , alors $x_1 + \dots + x_n > M$.
- Par exemple $f_n: x \mapsto n \sin(nx)$.
- $u_n = n + (-1)^n$
- En prenant $y = x$, on obtient $2f(x) = 2x$ pour tout x .

5) Perspectives historiques et culturelles

La logique est l'étude du raisonnement mathématique et sa formalisation. Elle est en un sens aux mathématiques ce que les mathématiques sont aux sciences.

Elle naît historiquement dans l'antiquité. Dans ses *Éléments* (300 av J.C.), Euclide propose un traitement axiomatique de la géométrie : les théorèmes de géométrie de l'époque sont retrouvés à partir d'un nombre limité de postulats (axiomes).

L'approche formelle de la logique attendra les XIXe et XXe siècles :

- George Boole (1815 – 1864, anglais) invente le « calcul booléen »
- Gottlob Frege (1848 – 1925, allemand) invente la logique formelle des prédicats (et en particulier les quantificateurs formels).

Un peu plus tard, les travaux de Bertrand Russel (1872 – 1970, anglais), David Hilbert (1862 – 1943, allemand), Kurt Gödel (1906 – 1978, autrichien) conduisent à une véritable étude des mathématiques et de leurs limites.

Citons quelques paradoxes et questions remarquables :

- Paradoxe de Berry* : Quel est « le plus petit entier qu'on ne peut pas décrire en moins de vingt mots » ?
- Paradoxe de Russel* : Existe-t-il un « ensemble de tous les ensembles qui se contiennent pas eux-même » ?
Réponse : Un tel ensemble A ne peut pas exister, puisque les deux assertions $A \in A$ et $A \notin A$ sont contradictoires.
- Problème de Hilbert* : Peut-on prouver la cohérence de la théorie de l'arithmétique, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible d'obtenir une contradiction à partir des axiomes de celle-ci.
Réponse : Oui, à partir d'axiomes plus forts, on peut démontrer cette cohérence.
- Théorème d'incomplétude de Gödel* : Il existe des assertions indécidables, c'est-à-dire dont on ne peut démontrer ni qu'elle sont vraies, ni qu'elles sont fausses.
- Hypothèse du continu* : L'existence d'une partie $A \subset \mathbb{R}$ qui ne soit ni en bijection avec $\mathbb{R}$, ni en bijection avec $\mathbb{N}$ est indécidable.